

### 3. 점근 표기법(asymptotic notation)

- 점근 표기법은 어떤 함수의 증가율을 다른 함수와 비교로 표현하는 방법이다.(해석학)
- 점근 표기법은 크기  $n$ 이 커질 때, 각 함수가 어떻게 성장하는가? 이다.
- 점근 표기법은 알고리즘의 복잡도를 **단순하게 표시**하는데 사용된다.
- 점근 표기법으로  $O, \Omega, \Theta$  등이 있다.

| 함수                   | 정의   | 주 특징            |
|----------------------|--|-----------------|
| 빅오<br>( $O$ )        | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $f(n) \leq c \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 두 양의 상수 $c$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = O(g(n))$ 이다.                                   | 최대시간 예측<br>(상한) |
| 빅오메가<br>( $\Omega$ ) | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $f(n) \geq c \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 두 양의 상수 $c$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = \Omega(g(n))$ 이다.                              | 최소시간 예측<br>(하한) |
| 빅세타<br>( $\Theta$ )  | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 세 양의 상수 $c_1, c_2$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = \Theta(g(n))$ 이다. | 상한과 하한을 동시에 지정  |

① 빅오 정의  $f(n) = O(g(n))$ 에 사용된 기호 '='는 좌우가 '동등하다'라는 의미가 아니다.

- 기호 '='는 '~이다'라는 의미로 해석하면 혼란을 막을 수 있다.
- $f(n) = O(g(n))$ 는 ' $f(n)$ 은  $g(n)$ 의 빅오이다' 라는 의미이다.
- 충분히 큰 수에 대해  $f(n) = O(g(n))$ 은 부등식  $f(n) \leq g(n)$ 이 성립하는 것을 의미한다.
- $g(n)$ 의 값은  $f(n)$ 의 상한값이라는 의미이다. 즉, 최대시간을 예측할 수 있게 한다.

② 빅오메가( $\Omega$ ) 함수는 최소시간을 예측할 수 있게 한다.

|    |   |
|----|---|
| 수식 | $f(x) = \Omega(1), f(x) = \Omega(x), f(x) = \Omega(x^2)$ 는 모두 다 성립하지만,<br>$f(x) = x^2 + 5x + 100$ $f(x) = \Omega(x^3), f(x) = \Omega(x^4)$ 등은 성립하지 않는다. |
|----|---|

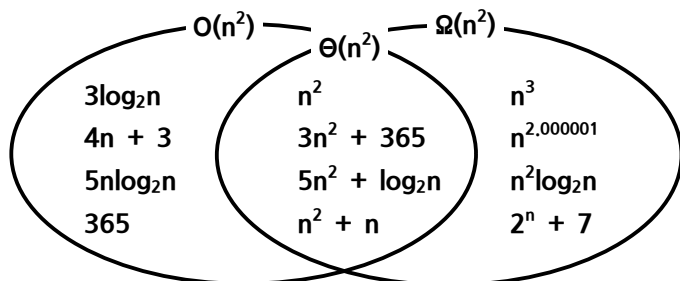
- 하한의 설정은 어떤 알고리즘이 수행되는데 필요한 최소시간을 예측할 수 있게 한다.

정렬, 검색 등의 알고리즘을 구현할 때 필요로 하는 최소시간은 과연 얼마인가? 라는 문제를 한번 생각해 볼 수 있다. 예를 들어,  $n$ 개의 자료로 구성된 리스트에서 각 원소를 비교하면서 자리를 바꾸는 방법으로 정렬을 수행할 때 어떤 방법을 사용하더라도 시간복잡도가  $n \log n$  보다 작아질 수 없음이 증명되어 있다. 이를  $f(n) = \Omega(n \log n)$ 로 표현할 수 있으며, 더 좋은 알고리즘 개발을 위한 **헛수고**는 그만 두라는 의미이다.

③ 빅세타( $\Theta$ )는  $O$ 와  $\Omega$ 를 합쳐 놓은 형태이다.

- $\Theta$ 는 최고차수의 상하한을 동시에 지정하므로 함수의 정확한 최고차수를 나타낼 수 있다.
- 어떤 함수를  $\Theta$ 로 나타낼 때도 최고차항의 차수 이위는 모두 무시된다.

◆  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$ ,  $\Theta(n^2)$ 의 관계



- $O(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2와 같거나 작은 함수들이다.
- 알고리즘의  $f(n)$ 이  $O(g(n))$ 에 속하면,  $f(n)$ 의 복잡도는 최악의 경우도  $g(n)$ 과 같거나 작다는 뜻이다.
- $O(n^2)$ 은 점근 상한을 제시한다.

- $\Omega(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2와 같거나 큰 함수들이다.
- 알고리즘의  $f(n)$ 이  $\Omega(g(n))$ 에 속하면,  $f(n)$ 의 복잡도는 최선의 경우도  $g(n)$ 과 같거나 크다는 뜻이다.
- $\Omega(n^2)$ 은 점근 하한을 제시한다.

- $\Theta(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2인 함수들이다.
- $\Theta(n^2)$ 은 점근 상한과 하한의 교집합이다.

- 이진검색의 실행시간은 항상  $O(\log_2 n)$ 이라고 할 수 있다.
- 이진검색의 실행시간은 항상  $\Theta(\log_2 n)$ 이라고 할 수 **없다**.
- 이진검색에서 검색 대상이 첫 번째 있으면, 실행시간은  $\Theta(1)$ 이다.
- 이진검색에서 최악의 경우 실행시간은  $\Theta(\log_2 n)$ 이라고 할 수 있다.
- 해서, 이진검색의 실행시간은  $O(\log_2 n)$ 이라고 하는 것이 가장 상세한 표현이다.

◆  $\sqrt{n}$ 의 점근 표기

- $\sqrt{2} = 1.41421\dots$ (무리수 : 순환하지 않은 무한소수)
- $\log_2 n$ 과  $\sqrt{n}$

|            |   |            |   |             |    |             |    |             |     |
|------------|---|------------|---|-------------|----|-------------|----|-------------|-----|
| n          | 1 | 2          | 4 | 8           | 16 | 32          | 64 | 128         | 256 |
| $\log_2 n$ | 0 | 1          | 2 | 3           | 4  | 5           | 6  | 7           | 8   |
| $\sqrt{n}$ | 1 | $\sqrt{2}$ | 2 | $2\sqrt{2}$ | 4  | $4\sqrt{2}$ | 8  | $8\sqrt{2}$ | 16  |

- $\log_2 n \leq \sqrt{n}$ 이다. 해서,  $\sqrt{n} = \Omega(\log_2 n)$ 이다.

**기출문제 분석**

1. 다음은 알고리즘 복잡도  $X$ 를 위한 정의이다. 어떤 복잡도에 대한 정의인가? [2010년 국가 7급]

정의 :  $f(n) = X(g(n))$

모든  $n(n \geq n_0)$ 에 대해  $f(n) \leq cg(n)$ 을 만족하는 두 양의 상수  $c$ 와  $n_0$ 가 존재하면  $f(n) = X(g(n))$ 이다.

- ①  $O(\text{big oh})$
- ②  $\Omega(\text{omega})$
- ③  $\Gamma(\text{gamma})$
- ④  $\Theta(\text{theta})$

☞  $O(\text{big oh})$  함수 정의

---

$n \geq n_0$ 를 만족하는 모든  $n$ 에 대하여  $f(n) \leq c \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 두 양의 상수  $c$ 와  $n_0$ 가 존재하기만 하면  $f(n) = O(g(n))$ 이다.

---

정답 : ①

2. 알고리즘 시간복잡도  $O(1)$ 이 의미하는 것으로 옳은 것은? [2002년 기술고시]

- ① 모든  $O(1)$  알고리즘은 어떤 컴퓨터에서나 똑같은 수행시간을 갖는다는 뜻이다.
- ② 모든  $O(1)$  알고리즘은 한 컴퓨터에서나 동일한 수행시간을 갖는다는 의미이다.
- ③ 알고리즘의 입력 데이터 수가 한 개라는 의미이다.
- ④ 알고리즘의 수행시간이 입력 데이터 수와 관계없이 일정하다는 의미이다.
- ⑤ 알고리즘의 길이가 입력 데이터보다 작다는 의미이다.

☞ 시간복잡도  $O(1)$

- 
- $O(1)$ 은 수행시간이 상수시간이라는 뜻이다.
  - 상수시간은 어떤 상황과 관계없이 일정한 속도로 빠르게 자료를 처리할 수 있다는 뜻이다.
  - 점근 표기에서 상수시간은  $O(1)$ 로 표현한다.
- 

정답 : ④

3. <보기>는 알고리즘의 시간복잡도(time complexity)를 표시하는 방법 중 하나인 빅오(big-oh) 표기법에 대한 정의이다. 빈칸 (가)와 (나)에 각각 들어갈 수식은? [2020년 서울 7급]

-----<보기>-----

두 개의 함수  $g(n)$ 과  $f(n)$ 에 대해서  $O(g(n))$ 은 다음과 같이 정의한다.

$O(g(n)) = \{f(n) : \text{모든 (가) 에 대해서 (나) 인 양의 상수 } c \text{와 } n_0 \text{가 존재한다}\}$

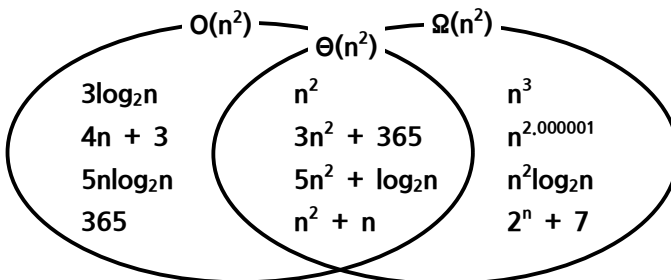
- |                |                                  |
|----------------|----------------------------------|
| (가)            | (나)                              |
| ① $n \geq n_0$ | $0 \leq f(n) \leq c \times g(n)$ |
| ② $n_0 \geq n$ | $0 \leq f(n) \leq c \times g(n)$ |
| ③ $n \geq n_0$ | $0 \leq g(n) \leq c \times f(n)$ |
| ④ $n_0 \geq n$ | $0 \leq g(n) \leq c \times f(n)$ |

☞ 시간복잡도를 표시하는 방법

- 점근 표기법은 크기  $n$ 이 커질 때, 각 함수가 어떻게 성장하는가? 이다.
- 점근 표기법은 알고리즘의 복잡도를 **단순하게 표시**하는데 사용된다.
- 점근 표기법으로  $O$ ,  $\Omega$ ,  $\Theta$  등이 있다.

| 함수                   | 정의  | 주 특징            |
|----------------------|---|-----------------|
| 빅오<br>( $O$ )        | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 두 양의 상수 $c$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = O(g(n))$ 이다.                                   | 최대시간 예측<br>(상한) |
| 빅오메가<br>( $\Omega$ ) | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $f(n) \geq c \cdot g(n) \geq 0$ 인 조건을 만족하는 두 양의 상수 $c$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = \Omega(g(n))$ 이다.                              | 최소시간 예측<br>(하한) |
| 빅세타<br>( $\Theta$ )  | $n \geq n_0$ 를 만족하는 모든 $n$ 에 대하여 $0 \leq c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n)$ 인 조건을 만족하는 세 양의 상수 $c_1, c_2$ 와 $n_0$ 가 존재하기만 하면 $f(n) = \Theta(g(n))$ 이다. | 상한과 하한을 동시에 지정  |

↓  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$ ,  $\Theta(n^2)$ 의 관계



4. 함수 또는 수식들의 복잡도에 대한 설명 중 가장 적절하지 않은 것은? [2021년 군무원 7급]

- ①  $\sum_{k=1}^n k$ 는  $O(n^2)$ 이다.
- ② 함수  $2n^2+3n+4$ 는  $\Omega(n^2)$ 이다.
- ③ 함수  $3n \log n + n^2 + 2$ 는  $\Theta(n \log n)$ 이다.
- ④  $\sum_{k=1}^n k^3$ 는  $\Theta(n^4)$ 이다.

☞ 복잡도

• 함수  $3n \log n + n^2 + 2$ 는  $\Theta(n \log n)$ 이다. (x) →  $\Theta(n^2)$ 이다.

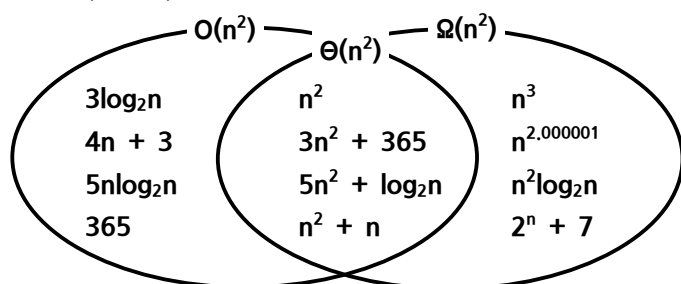
•  $\sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = O(n^2)$

•  $\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = O(n^2)$

•  $\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = O(n^3)$

•  $\sum_{k=1}^n k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \Theta(n^4)$

//  $O(n^2)$ ,  $\Omega(n^2)$ ,  $\Theta(n^2)$ 의 관계



- $O(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2와 같거나 작은 함수들이다.
- $\Theta(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2인 함수들이다.
- $\Omega(n^2)$ 에 속하는 함수는 최고차항의 차수가 2와 같거나 큰 함수들이다.

6 <http://cafe.daum.net/pass365>(홍재연)

5. 점근적 표기법(asymptotic notation)에 관한 사칙연산으로 옳지 않은 것은? [2009년 국가 7급]

- ①  $O(n) + O(n) = O(n)$
- ②  $O(n^2) + O(n \log n) = O(n^2)$
- ③  $O(n^2) + O(n) = O(n^2)$
- ④  $O(\log n) \cdot O(n^2) = O(n^2)$

♣ 빅오(O) 표현

---

$O(\log n) \cdot O(n^2) = O(n^2 \log n) \rightarrow$  곱셈은 덧셈과 다르다.

---

정답 : ④