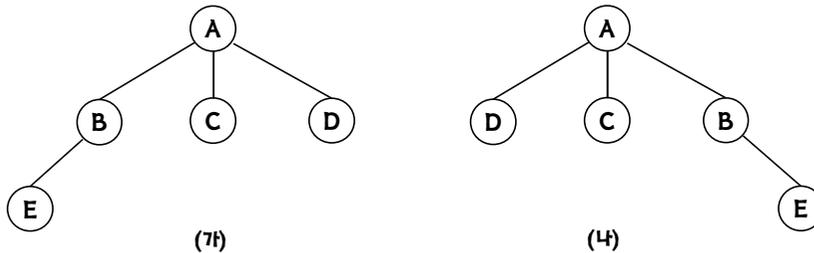


4. 트리 종류

(1) 순서트리와 비순서트리

순서트리 (ordered tree)	<ul style="list-style-type: none"> • 자식노드 위치에 따른 의미가 중요한 트리이다. • 형제노드들의 순서가 중요한 트리이다. • 장남, 차남 등
비순서트리 (oriented tree)	<ul style="list-style-type: none"> • 노드 계층상의 의미는 있으나 • 형제노드들의 순서가 중요하지 않은 트리이다. • 단, 부모노드는 같아야 한다.

[예제] 다음 두 트리는 같은 트리냐? 다른 트리냐?



[분석] 위의 두 트리구조 (가)와 (나)는 자식들의 노드 위치만 다르다.

- 서로 같은 트리로 보는 경우 : 비순서트리라고 하고,
- 서로 다른 트리로 보는 경우 : 순서트리라 한다.

(2) 일반트리와 이진트리 차이점

일반트리	<ol style="list-style-type: none"> ① 적어도 하나 이상의 노드를 갖는다. ② 자식의 순서를 구분하지 않는다. 즉, 오리엔티드 트리(비순서트리)이다. ③ 각 노드의 차수는 제한이 없다.
이진트리	<ol style="list-style-type: none"> ① 공백(empty)도 가능(공트리도 이진트리이다) ② 자식의 순서를 구분한다. 즉, 오더드 트리(순서트리)이다. ③ 한 노드는 최대 두 개의 자식만을 갖는다.(노드의 차수가 2 이하인 트리)

(3) 이진트리 종류

이진트리는 일반트리와는 다른 자료구조로 구분한다.

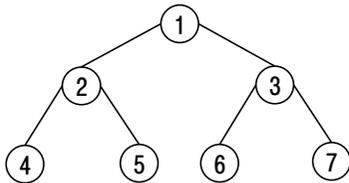
〈이진트리 정의〉

이진트리는 공백 트리이거나 하나의 근노드와 왼쪽 서브트리, 오른쪽 서브트리로 분리된 2개의 이진트리로 구성된 노드의 유한집합이다.

- 이진트리는 0개의 노드로 구성될 수 있다.

〈포화이진트리(full binary tree) 정의〉

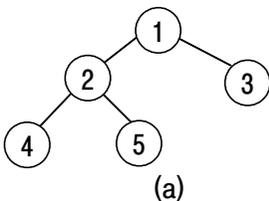
깊이가 k 인 포화이진트리는 깊이가 k 이며, 노드 수가 $2^k - 1$ ($k \geq 0$)인 이진트리이다.



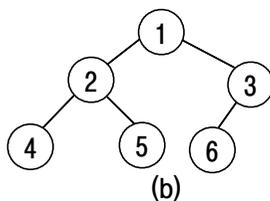
← 포화이진트리를 근노드로 부터 위에서 아래로, 좌에서 우로 차례로 번호를 붙인 경우이다.

〈완전이진트리(complete binary tree) 정의〉

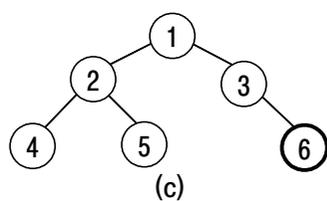
깊이가 k 이고, 노드 수가 n 인 이진트리가 깊이가 k 인 포화이진트리에 순차적으로 번호를 붙인 노드들과 1대 1로 대응한다면 완전이진트리이다.



(a)



(b)



(c)

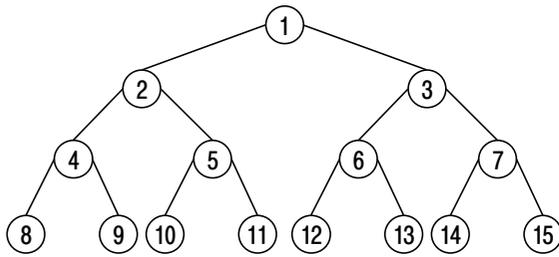
- 그림 (a)와 (b)는 완전이진트리이고,
- 그림 (c)는 완전이진트리가 될 수 없다.
- 그림 (c)는 노드 3의 왼쪽 자식노드가 없다.

〈사향이진트리 정의〉

사향이진트리는 왼쪽 또는 오른쪽, 한쪽 방향으로만 가지가 뻗어져 있는 이진트리이다.



// 이진트리 보조 정리



↓ 루트노드의 레벨(높이, 깊이)가 1인 경우

- ① 이진트리는 레벨 k에서 최대 2^{k-1} 개의 노드를 가질 수 있다.
- ② 깊이가 k인 이진트리는 최대 $2^k - 1$ 개의 노드를 가질 수 있다.
- ③ 공백이 아닌 이진트리에서
 n_0 는 차수가 0, n_2 는 차수가 2인 노드 수라 할 때 $n_0 = n_2 + 1$ 이다.

// n개의 노드를 가진 완전이진트리 높이

루트노드의 높이 0인 경우	<ul style="list-style-type: none"> • $n = 8$이면, 높이 = $\log_2 n = \log_2 8 = 3$ • $n = 15$이면, 높이 = $\lfloor \log_2 n \rfloor = \lfloor \log_2 15 \rfloor = \lfloor 3.\times \rfloor = 3$ • 수식으로 표현 : 높이 = $\lfloor \log_2 n \rfloor$ (바닥함수 $\lfloor \rfloor$ 사용)
루트노드의 높이 1인 경우	<ul style="list-style-type: none"> • $n = 8$이면, 높이 = $\lceil \log_2 (8 + 1) \rceil = \lceil \log_2 9 \rceil = \lceil 3.\times \times \times \rceil = 4$ • $n = 15$이면, 높이 = $\lceil \log_2 (15 + 1) \rceil = 4$ • 수식으로 표현 : 높이 = $\lceil \log_2 (n + 1) \rceil$ (천장함수 $\lceil \rceil$ 사용)

- 천장함수 : $\lceil 8.2 \rceil = 9 \rightarrow 8.2$ 보다 큰 최소 정수
- 바닥함수 : $\lfloor 8.9 \rfloor = 8 \rightarrow 8.9$ 보다 작은 최대 정수(소수점이하를 버린다)

기출문제 분석

1. 78개의 간선(edge)으로 이루어진 이진트리(binary tree)가 가질 수 있는 최대 높이와 최소 높이의 차이는? (단, 루트 노드만 존재하는 이진트리의 높이는 1이다) [2017년 국가 7급]

- ① 71 ② 72
- ③ 73 ④ 74

☞ 이진트리가 가질 수 있는 최대 높이와 최소 높이

• 먼저, 78개의 간선이면 노드수는 $78 + 1 = 79$ (개)

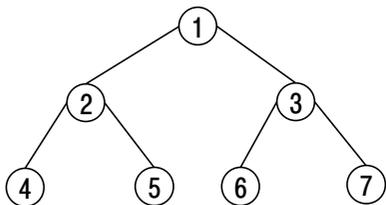
• 최대 높이는 사항이진트리인 경우 : 높이 **79**

• 최소 높이는 완전이진트리인 경우 : 높이 **7**

• 높이 차이 = 최대 높이 - 최소 높이 = $79 - 7 = 72$

// 노드수가 79개인 경우, 완전이진트리의 높이

• 높이가 k인 경우, 완전이진트리가 가질 수 있는 최대 노드수는 $2^k - 1$ 이다.



k=3이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 8 - 1 = 7$

k=1이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 2 - 1 = 1$

k=2이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 4 - 1 = 3$

k=3이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 8 - 1 = 7$

k=4이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 16 - 1 = 15$

k=5이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 32 - 1 = 31$

k=6이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 64 - 1 = 63$

k=7이면 최대 노드수는 $2^k - 1 = 128 - 1 = 127$

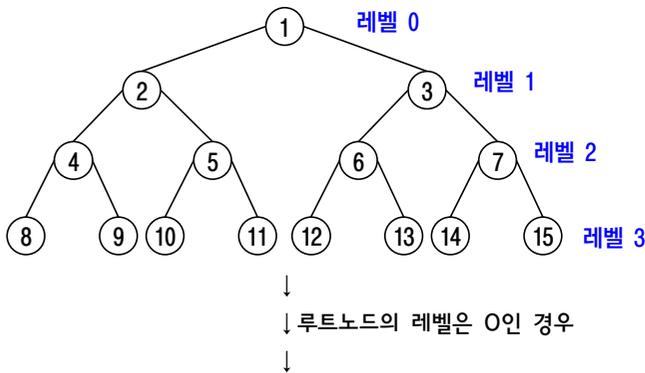
• 해서, 노드수가 **79**일 때, 완전이진트리의 높이는 **7**이다.(최소 높이)

2. 이진트리의 성질에 대한 설명으로 옳은 것은? (단, 루트노드의 레벨은 0이고, 차수가 0인 노드의 개수는 n_0 , 차수가 1인 노드의 개수는 n_1 , 차수가 2인 노드의 개수는 n_2 로 한다) [2021년 국가 7급]

- ① 이진트리에서 단말노드의 개수를 n_0 이라 할 때, n_2 와의 관계식 $n_0 = n_2 + 1$ 을 만족한다.
- ② 깊이가 k 인 이진트리가 가질 수 있는 노드의 최대 개수는 $2^{(k+1)}$ 이다. ($k \geq 0$)
- ③ 이진트리의 레벨 j 에 있는 노드의 최대 개수는 $2^{(j-1)}$ 개이다. ($j \geq 0$)
- ④ 이진트리의 전체 노드 개수는 $n_0 + n_1 + n_2 - 1$ 개이다.

☞ 이진트리 성질

// 이런 유형의 문제는 다음처럼 트리를 그려서 풀면된다.



- ① n_0 는 차수가 0, n_2 는 차수가 2인 노드 수라 할 때 $n_0 = n_2 + 1$ 이다.
 - $n_0 = 8$
 - $n_2 = 7$ 이므로 $n_0 = n_2 + 1$
- ② 깊이가 k 인 이진트리는 최대 $2^{(k+1)} - 1$ 개의 노드를 가질 수 있다.
 - $k = 3$ 일 때, 최대 노드수 = $2^{(k+1)} - 1 = 2^4 - 1 = 15$ (개)
- ③ 이진트리의 레벨 j 에 있는 노드의 최대 개수는 2^j 개다. ($j \geq 0$)
 - $j = 2$ 일 때, 레벨 j 에 있는 노드의 최대 개수는 $2^j = 2^2 = 4$ 개다.
- ④ 이진트리의 전체 노드 개수는 $n_0 + n_1 + n_2$ 개다.
 - $n_0 + n_1 + n_2 = 8 + 0 + 7 = 15$ (개)

[주의!] 주어진 문제에서는 루트노드의 레벨을 0으로 제시하였다.

3. N개의 노드를 가진 완전이진트리(complete binary tree)에 대한 설명으로 옳지 않은 것은?
(단, 루트 노드의 높이는 1로 한다) [2011년 국가 7급]

- ① 단말노드의 개수는 비단말노드의 개수와 같거나 하나가 더 많다.
- ② 높이가 K라면 노드 개수 N의 범위는 $2^{K-1} \leq N \leq 2^K - 1$ 이다.
- ③ 포화이진트리(full binary tree)는 완전이진트리의 일종이다.
- ④ 완전이진트리를 최적으로 구성할 경우 높이는 N이다.

☞ 완전이진트리 높이

• 완전이진트리 높이(노드 수가 8이면) : $1 + \log_2 n = 1 + \log_2 8 = 1 + 3 = 4$

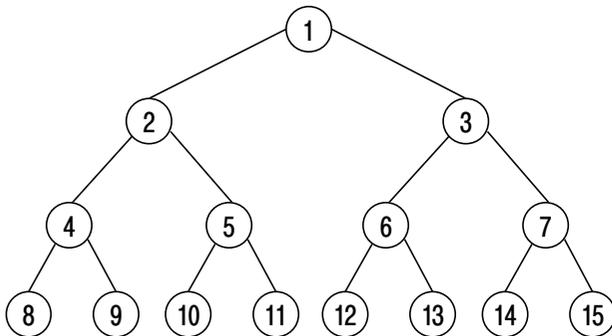
정답 : ④

4. 노드의 개수가 177인 완전이진트리(complete binary tree)에서 마지막 레벨에 위치한 노드의 개수는? (단, 루트 노드는 첫 번째 레벨에 위치한다) [2016년 국가 7급]

- ① 49 ② 50
- ③ 78 ④ 127

☞ 완전이진트리

• 완전이진트리에서 각 레벨이 꽉 찬 경우, 노드의 개수는 $2^l - 1$ 이 된다.(그림 참조)



- 레벨이 7이면 : $2^7 - 1 = 128 - 1 = 127$
- 해서, $177 - 127 = 50 \rightarrow$ 마지막 레벨에 위치한 노드의 개수

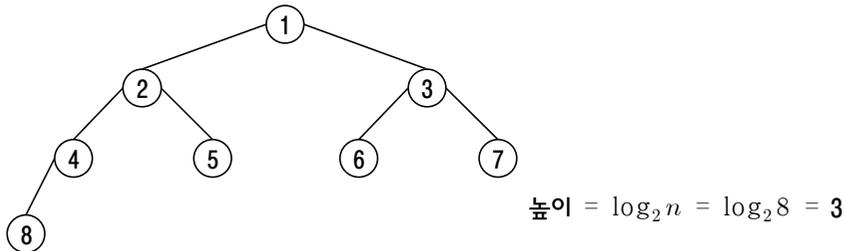
정답 : ②

5. node의 개수가 n인 완전이진트리의 높이를 구하는 식으로 가장 옳은 것은? (단, 루트노드의 높이는 0으로 가정한다) [2022년 군무원 7급]

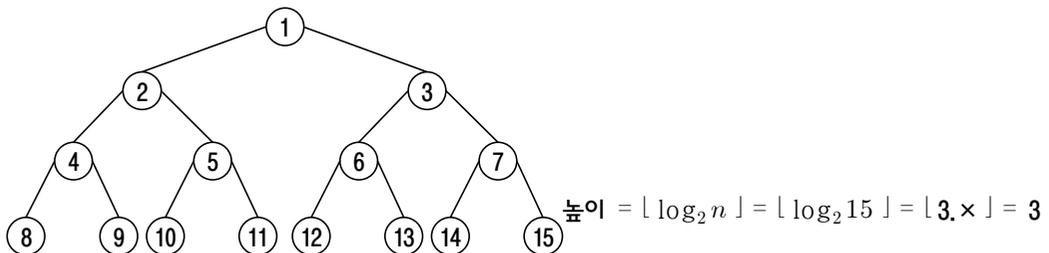
- ① $\lfloor \log_2 n \rfloor$
- ② n^2
- ③ $n-1$
- ④ $\min(\text{left subtree의 높이}, \text{right subtree의 높이}) + 1$

☞ 완전이진트리 높이 - 루트노드의 높이는 0

① n=8인 경우



② n=15인 경우



- node 개수가 8개~15개인 경우는 완전이진트리의 높이는 3이 된다.(루트노드의 높이는 0)
- 이를 수식으로 나타내면, $\lfloor \log_2 n \rfloor$ 이 된다.
- 루트노드의 높이는 0으로 제시하였다. 해서, 바닥함수 $\lfloor \rfloor$ 를 사용해야 한다.

// 만약, 루트노드의 높이를 1로 제시하면

- n개의 노드를 가진 완전이진트리 높이는 $\lceil \log_2 (n+1) \rceil$ 이 된다.(천장함수 $\lceil \rceil$ 를 사용)
- $n = 8$ 이면, $\lceil \log_2 (8+1) \rceil = \lceil \log_2 9 \rceil = \lceil 3.\times \times \times \rceil = 4$
- $n = 15$ 이면, $\lceil \log_2 (15+1) \rceil = 4$

6. 완전이진트리의 전체 노드 수를 n , 근노드의 레벨을 1, 높이를 k 라고 할 때, 옳지 않은 설명은? [2020년 군무 7급]

- ① 배열 $A[1..n]$ 에 저장하면 $i(1 \leq i \leq n)$ 번째 노드의 왼쪽 자식노드는 $2i$ 번째이다.
- ② 트리의 높이는 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 가 된다.
- ③ 트리가 가질 수 있는 최소 노드 수는 2^{k-1} 이다.
- ④ 트리가 가질 수 있는 최대 노드 수는 $2^k - 1$ 이다.

☞ 완전이진트리

// 높이 $k=4$ 일 때, 트리가 가질 수 있는 최소, 최대 노드 수

최소 노드 수		$2^{k-1} = 2^{4-1} = 8$
최대 노드 수		$2^k - 1 = 2^4 - 1 = 15$

• 노드 수 : $2^{k-1} \leq n \leq 2^k - 1$

• $n = 8$ 일 때, 트리의 높이 = $\lceil \log_2(n+1) \rceil = \lceil \log_2(8+1) \rceil = \lceil 3.\times\times\times \rceil = 4$

• $n = 15$ 일 때, 트리의 높이 = $\lceil \log_2(n+1) \rceil = \lceil \log_2(15+1) \rceil = \lceil 4 \rceil = 4$

• 트리의 높이는 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 가 된다.(×)

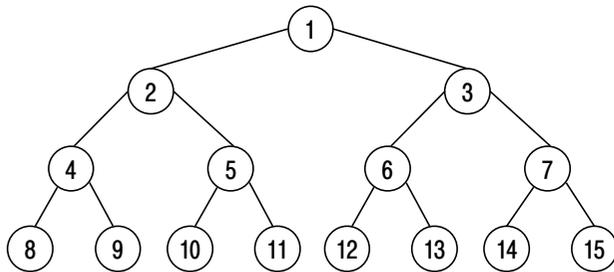
→ 완전이진트리의 전체 노드 수가 n 일 때, 트리의 높이는 $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ 가 된다.

• 천장함수 : $\lceil 3.2 \rceil = 4$, $\lceil -3.2 \rceil = -3$

7. 완전이진트리(complete binary tree)를 배열에 저장할 때, 루트 노드를 배열 A[1]에 저장하고 나머지 노드들은 트리의 레벨순서에 따라 왼쪽에서 오른쪽으로 연속적으로 저장한다. 노드 A[k]와 관계된 노드를 찾는 규칙이 바르게 짝지어지지 않은 것은? [2013년 국가 7급]

- ① 부모노드 - $A[\lfloor k/2 \rfloor]$ ② 왼쪽 자식노드 - $A[2k]$
- ③ 오른쪽 자식노드 - $A[2k+1]$ ④ 형제노드 - $A[k+1]$

☞ 완전이진트리



// 예를 들어, A[k]에서 k = 7이면

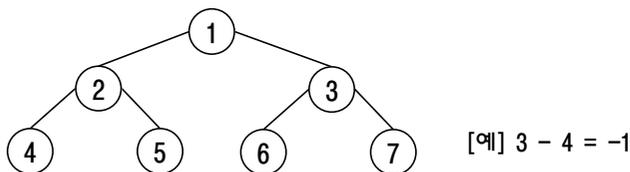
- A[7]의 부모노드 : $A[\lfloor k/2 \rfloor] = A[\lfloor 7/2 \rfloor] = A[3]$
- A[7]의 왼쪽 자식노드 : $A[2k] = A[2 \times 7] = A[14]$
- A[7]의 오른쪽 자식노드 : $A[2k+1] = A[2 \times 7+1] = A[15]$
- A[7]의 형제노드 : A[7]의 형제노드는 A[6]
→ $A[k+1] = A[7+1] = A[8]$, A[7]의 형제노드로 A[8]이 될 수 없다.

정답 : ④

8. 깊이가 k인 포화이진트리(full binary tree)의 비단말노드의 개수에서 단말노드의 개수를 뺀 값으로 옳은 것은? (단, $k > 0$) [2013년 국가 7급]

- ① -1 ② 0 ③ 1 ④ k-1

☞ 포화이진트리

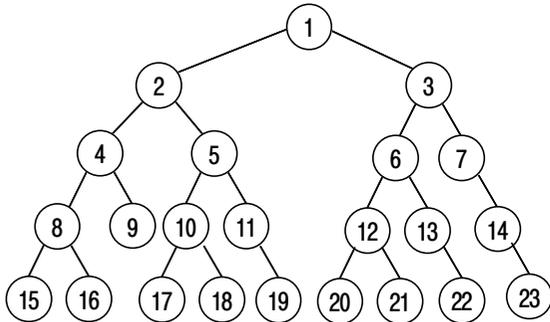


정답 : ①

9. 이진트리로 구성하는 것이 불가능한 것은? (단, 루트의 단계는 1로 가정) [2014년 국가 7급]

- ① 노드 개수가 23개이고 높이가 5인 이진트리
- ② 높이가 5이고 노드 개수가 10개이며 단말노드 개수가 6개인 이진트리
- ③ 노드 개수가 20개이고 간선이 19개인 이진트리
- ④ 높이가 6이고 노드 개수가 32개인 완전이진트리

♣ 이진트리 - 노드 개수가 23개이고 높이가 5인 이진트리



• 높이가 5이고 노드 개수가 10개이며 단말노드 개수가 6개인 이진트리 → 구성 불가

정답 : ②

10. 깊이가 k인 이진트리가 가질 수 있는 최대 노드수를 A라 하고, 최소 노드수를 B라고 할 때, A - B의 값은?(단, 루트노드의 레벨은 1로 한다) [2009년 국가 7급]

- ① $2^{k-1} + k + 1$ ② $2^{k-1} + k - 1$
- ③ $2^k - k - 1$ ④ $2^k - k + 1$

♣ 이진트리에서 노드수

- 최대 노드수를 가지는 경우(포화이진트리) : $2^k - 1$
- 최소 노드수를 가지는 경우(사향이진트리) : k

$$\therefore A - B = (2^k - 1) - k = 2^k - k - 1$$

정답 : ③

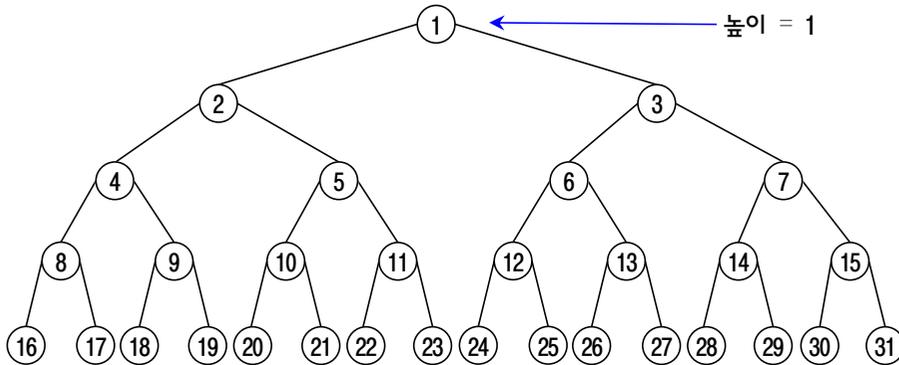
11. 이진트리에 대한 설명으로 옳은 것만을 모두 고르면? [2022년 국가 7급]

- ㄱ. 공백 이진트리의 높이를 0으로 본다면, 높이가 5인 이진트리의 최대 노드 수는 15이다.
- ㄴ. 9개의 노드를 가지고 있는 이진트리는 8개의 간선을 가진다.
- ㄷ. 루트노드의 인덱스를 1로 하는 1차원 배열로 완전이진트리를 표현할 때, 인덱스 13인 노드의 부모노드는 인덱스가 7이다.
- ㄹ. 7개 노드로 구성할 수 있는 이진트리의 최대 높이와 최소 높이의 차는 4이다.

- ① ㄱ, ㄴ ② ㄴ, ㄷ ③ ㄴ, ㄹ ④ ㄷ, ㄹ

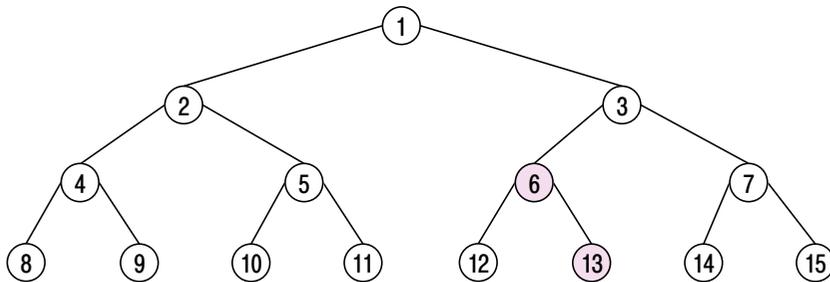
☞ 이진트리

- ㄱ. 공백 이진트리의 높이를 0으로 본다면, 높이가 5인 이진트리의 최대 노드 수는 15이다.(×)
 → 공백 이진트리의 높이를 0으로 본다면, 높이가 5인 이진트리의 최대 노드 수는 31이다.



• 최대 노드 수 = $2^k - 1 = 2^5 - 1 = 31$

- ㄷ. 루트노드의 인덱스를 1로 하는 1차원 배열로 완전이진트리를 표현할 때, 인덱스 13인 노드의 부모노드는 인덱스가 7이다.(×) → 인덱스 13인 노드의 부모노드는 인덱스가 6이다.



• 인덱스 13인 노드의 부모노드는 인덱스가 6이다.

12. 4개의 노드로 구성된 서로 다른 모양의 이진트리는 모두 몇 개인가? [2004년 국가 기술고시]

- ① 11개 ② 12개
 ③ 14개 ④ 15개

☞ n개의 노드를 가진 상이한 이진트리 수 - 공식 이용

// b_n 을 n개의 노드를 가진 서로 다른 이진트리의 수라 하면

$$\begin{aligned} \bullet b_n &= \frac{1}{n+1} \cdot \binom{2n}{n} \quad \rightarrow \text{조합 표현은 } \binom{n}{r} \text{ 또는 } C(n, r) \text{로 나타낸다.} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot C(2n, n) \quad \rightarrow \binom{2n}{n} \text{은 } C(2n, n) \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{P(2n, n)}{n!} \quad \rightarrow C(n, r) = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(2n-n+1)}{n!} \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{n!} \end{aligned}$$

공식	$b_n = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)\dots(n+1)}{n!}$
-----------	---

- n = 2이면, $b_2 = \frac{1}{2+1} \cdot \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} = 2(\text{개})$
- n = 3이면, $b_3 = \frac{1}{3+1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5(\text{개})$
- n = 4이면, $b_4 = \frac{1}{4+1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14(\text{개})$
- n = 5이면, $b_5 = \frac{1}{5+1} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 42(\text{개})$

◆ **순열**

- $P(n, r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$
- $P(5, 2) = 5 \times 4 = 20$
- $P(5, 3) = 5 \times 4 \times 3 = 60$

◆ **조합**

- $C(n, r) = P(n, r) / r!$
 $= n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) / r!$
- $C(5, 2) = (5 \times 4) / (2 \times 1) = 10$
- $C(5, 3) = (5 \times 4 \times 3) / (3 \times 2 \times 1) = 10$

또 다른 공식	$b_n = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$
----------------	--------------------------------

• n = 5이면, $b_5 = \frac{(2 \times 5)!}{5!(5+1)!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 42(\text{개})$

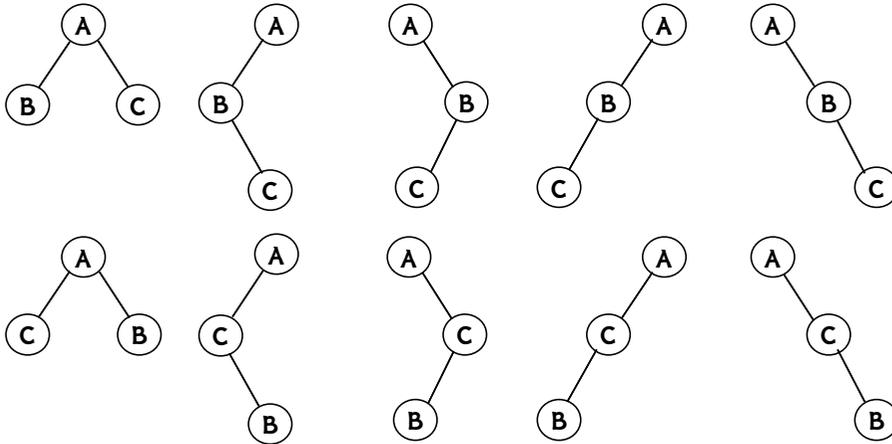
- 위의 내용에서 공식을 유도하기 까지는 매우 복잡하다.
- 하지만, 답을 찾기 위한 식을 외우는 방법은 매우 간단하다. 잘 생각해 보기 바란다.

13. A를 Root node로 할 때 A, B, C 세 개의 노드로 구성 가능한 이진트리는 몇 개인가? [2005년 국가 7급]

- ① 5 ② 6
- ③ 10 ④ 11

♣ 이진트리 가지 수

• 노드에 자료가 저장될 때 이진트리 종류

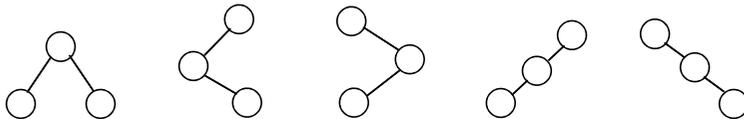


정답 : ③

14. 노드 3개로 만들 수 있는 이진트리의 종류는 몇 가지인가? [1997년 서울 7급]

- ① 3개 ② 4개
- ③ 5개 ④ 6개

♣ 이진트리 가지 수 - 노드 3개로 만들 수 있는 이진트리(이진트리 구조만 다른 것)



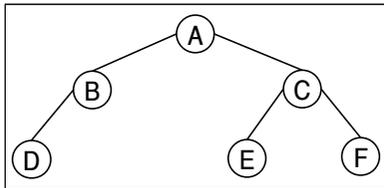
정답 : ③

15. 이진트리에서 단말노드가 8개일 때, 차수가 2인 노드는 몇 개인가? [2005년 국가 7급]

- ① 7개 ② 8개
- ③ 9개 ④ 10개

♣ 이진트리

// 이런 유형의 문제는 간단한 임의의 트리구조를 그려보면 해답이 보인다.



• 주어진 문제에서 $n_0 = 8$ 이므로

$$\begin{aligned} n_2 &= n_0 - 1 \\ &= 8 - 1 \\ &= 7 \end{aligned}$$

- 이진트리에서 단말노드(n_0)와 차수가 2인 노드(n_2)는 항상 하나 차이가 된다.
- 즉, $n_2 = n_0 - 1$

정답 : ①

16. 다음 설명에 해당하는 노드 수 A, B, C의 합은? (단, 트리의 높이는 트리의 최대 레벨을 의미하며, 루트노드의 레벨을 1로 한다) [2022년 국가 7급]

- A = 높이가 5인 완전이진트리가 가질 수 있는 최소 노드 수
- B = 높이가 6인 포화이진트리의 노드 수
- C = 높이가 7인 완전이진트리가 가질 수 있는 최대 노드 수

- ① 142 ② 206
- ③ 209 ④ 222

♣ 노드 수

- A = 높이가 5인 완전이진트리가 가질 수 있는 최소 노드 수 = $2^4 = 16$
- B = 높이가 6인 포화이진트리의 노드 수 = $2^6 - 1 = 63$
- C = 높이가 7인 완전이진트리가 가질 수 있는 최대 노드 수 = $2^7 - 1 = 127$

- A + B + C = $16 + 63 + 127 = 206$

정답 : ②