

# 제12장 탐색구조

## 1. AVL 트리

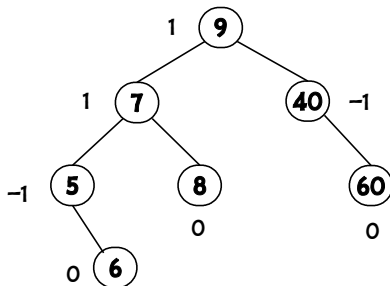
AVL 트리는 1962년 Adelson-Velskii와 Landis가 제안하였다. 첫 글자가 AVL이다.

◆ AVL 트리 정의 - 2가지 조건이 만족되어야 한다.

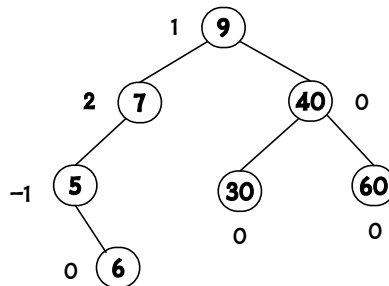
AVL 트리는

- ① 이진탐색트리이면서 - 이진탐색트리의 특수 형태
- ② 임의 노드에 대해서도 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이가 -1, 0, 1이 되어야 한다. 이를 균형인수(BF; balanced factor)라 한다. - 균형탐색트리

서브트리의 좌우 높이 차이 : $ h_L - h_R  \leq 1$	$h_L$ : 왼쪽 서브트리의 높이 $h_R$ : 오른쪽 서브트리의 높이
---------------------------------------	---



(a) AVL 트리



(b) AVL 트리 아님

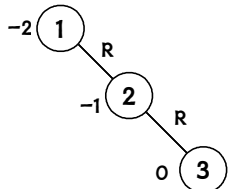
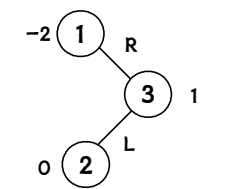
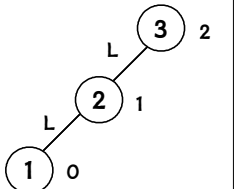
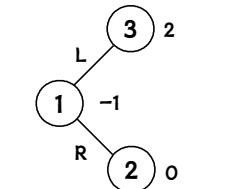
- 균형인수가 -1, 0, +1 이외의 값이 있으면 AVL 트리가 될 수 없다.
- 특히, 균형인수가 -1, +1인 노드를 임계노드(critical node)라 한다.

## 1. AVL 트리에서 회전

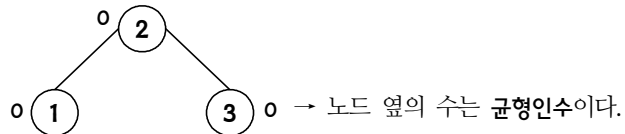
AVL 트리에 새로운 노드를 삽입하면 균형이 깨질 수도 있다. 회전은 균형이 깨진 트리에 대해 전체가 아닌 일부분의 노드를 회전시켜서 AVL 트리가 되도록 하는 것이다.

### ◆ 회전 종류 - 4가지

- 회전의 종류는 트리구조상 'RR, RL, LL, LR' 4가지만 있다.
- 새로운 키가 삽입되면서 부분적으로 다음 4가지 형태 중에서 회전을 실시하게 된다.

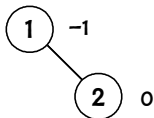
RR 회전이 필요	RL 회전이 필요	LL 회전이 필요	LR 회전이 필요
			

↓ 4가지 모두 회전 결과는 다음과 같다.

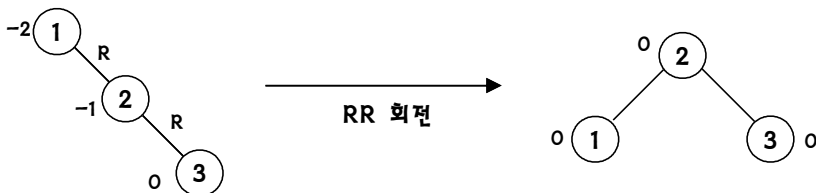


## 2. RR과 RL 회전

① 값 1과 2를 입력 : 2개의 노드를 가진 AVL 트리

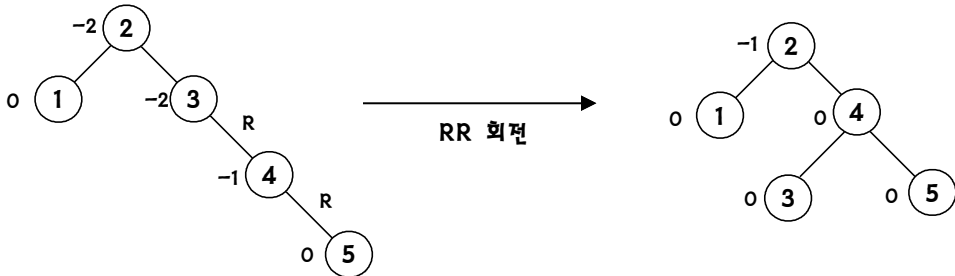


② 값 3을 입력 : 균형인수가 2인 노드가 나타났다. 균형이 깨짐 → 회전



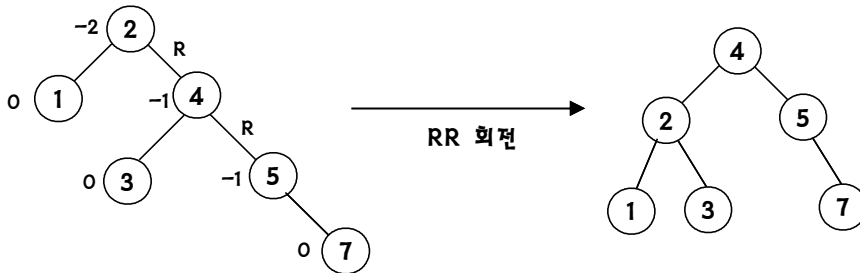
- RR회전 : 새로운 자료 삽입 결과 오른쪽으로 기울어진 트리를 균형 잡는다.

③ 값 4, 5를 입력 : 5가 입력될 때 균형이 깨짐 → 회전

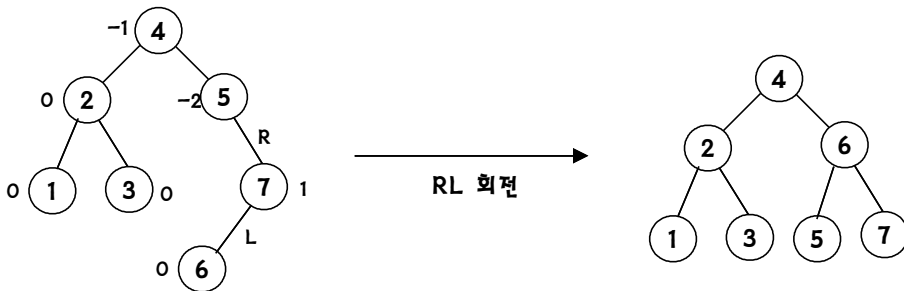


- 새로운 키가 삽입되면서 부분적으로 회전을 실시하게 된다.
- 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 여러 개 있을 때 주의할 것!
- 최근에 삽입된 노드에서 가장 가까운 조상노드의 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 회전 기준이다.
- 값이 3인 노드가 회전 대상 기준이 된다.
- 어떤 노드의 균형인수가  $\pm 2$ 가 되려면 새로운 노드가 삽입되기 전에는  $\pm 1$ 인 상태이다.

④ 값 7을 입력



⑤ 값 6을 입력

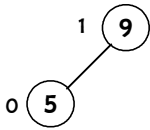


- RR과 RL 회전은 노드 삽입으로 인해 오른쪽으로 기울어진 트리를 균형 잡을 수 있다.
- 회전에 관련되지 않는 서브트리는 높이가 변하지 않는다.

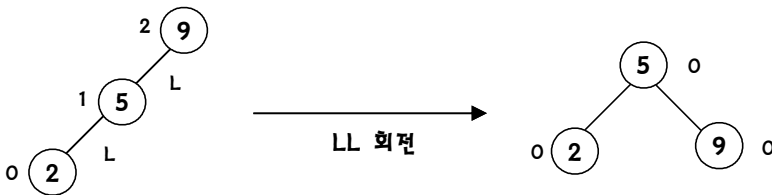
### 3. LL과 LR 회전

LL과 LR 회전은 RR과 RL 회전에 각각 대칭된다.

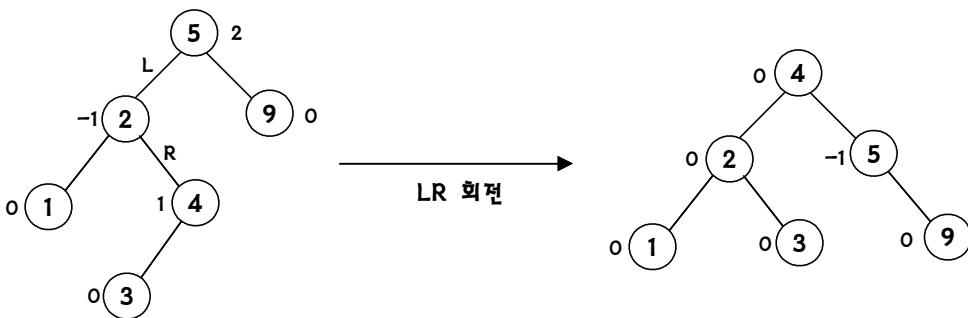
① 값 9, 5를 입력 : 2개의 노드를 가진 AVL 트리



② 값 2를 입력 : 균형인수가 2인 노드가 나타났다. 균형이 깨짐 → 회전



③ 값 4, 1, 3을 차례로 입력 : 3이 입력될 때 균형이 깨짐 → 회전



**[Tip 1]** LL과 RR은 단일회전, LR과 RL은 이중회전이라 한다.

**[Tip 2]** 새로운 노드 삽입시 재균형(회전)

- 재균형이 필요없을 확률 : 약 0.54
- 단일회전이 필요할 확률 : 약 0.23
- 이중회전이 필요할 확률 : 약 0.23

4. AVL 트리의 연산시간 및 특징

- ① n개의 노드를 가지는 AVL 트리에서 특정한 값 탐색시간은  $O(\log_2 n)$ 이다.
- ② AVL 트리에 새로운 자료를 삽입하거나 삭제하는 연산시간은  $O(\log_2 n)$ 이다.
- ③ AVL 트리의 모든 값을 순서대로 출력하는 연산시간은  $O(n)$ 이다.
- ④ AVL 트리를 중위운행(좌,중,우)하면 오름차순으로 정렬된 결과를 얻는다.

기출문제 분석

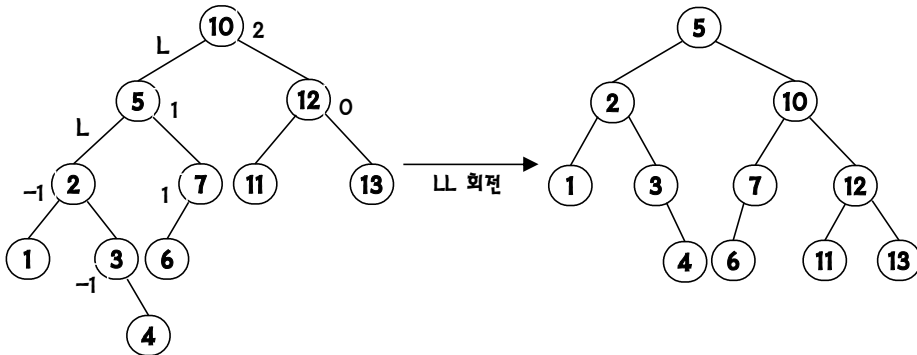
1. 다음 데이터를 이용하여 AVL 트리를 생성할 때, 이에 대한 설명으로 옳지 않은 것은? [2012년 국가 7급]

12, 11, 10, 5, 3, 7, 6, 1, 13, 2, 4

- ① AVL 트리에서 7을 검색하기 위해서는 4번의 비교가 필요하다.
- ② AVL 트리의 루트 값은 5이다.
- ③ 4가 삽입될 때, AVL 트리의 균형이 깨져서 재구성이 발생한다.
- ④ 6은 리프노드이다.

☞ 완성된 AVL 트리

• 마지막 자료 4가 입력되는 상태에서 LL 회전한 결과이다.



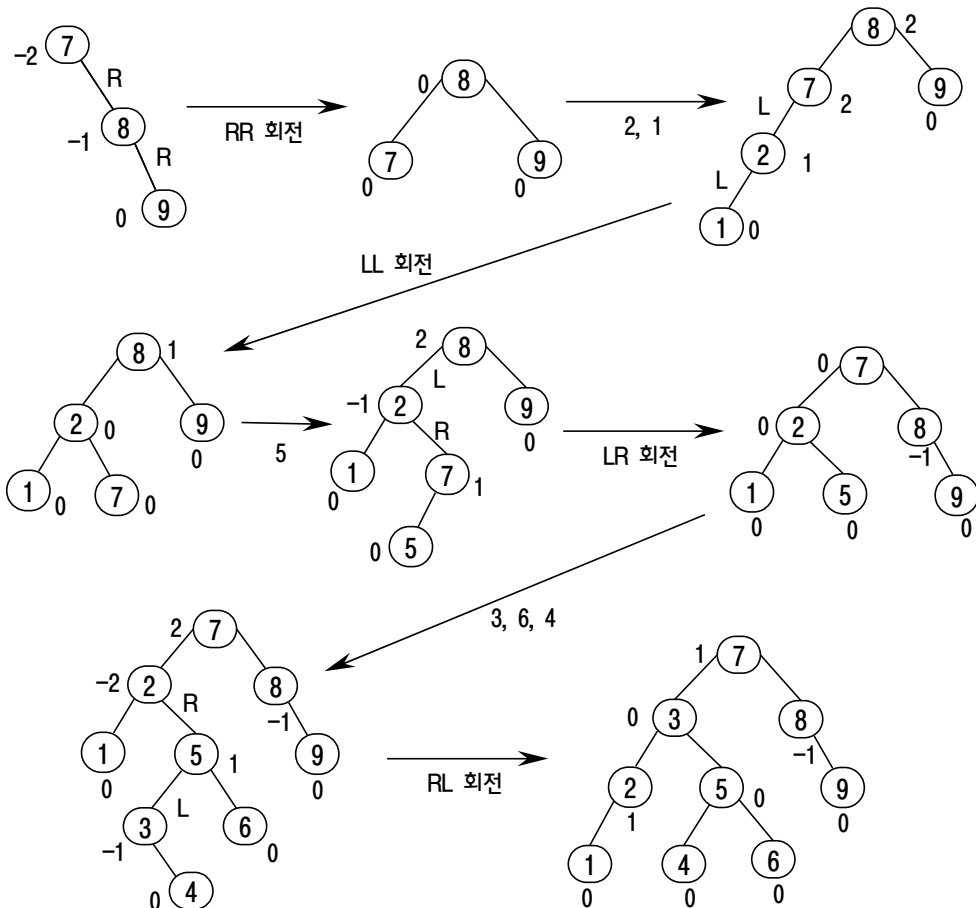
- 회전 기준은  
최근에 삽입된 노드로부터 가장 가까운 조상노드의 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드이다.
- 마지막 자료 4가 입력될 때, 회전 기준은 (10, 5, 2)이 된다.  
→ 이것을 정확하게 알면 안 헛갈린다.
- AVL 트리에서 7을 검색하기 위해서는 3번의 비교가 필요하다.

2. 키 값 입력 순서가 7, 8, 9, 2, 1, 5, 3, 6, 4인 노드들을 이용하여 AVL 트리를 구성하였다. 완성된 AVL 트리에서 균형인수가 1인 노드의 키값은?

- ① 2                      ② 4  
 ③ 5                      ④ 9

☞ AVL 트리에서 회전 4가지 - LL, RR, LR, RL

- 새로운 키가 삽입되면서 부분적으로 회전을 실시하게 된다.
- 최근에 삽입된 노드에서 가장 가까운 조상노드의 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 회전 기준이다.
- 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 여러 개 있을 때 주의할 것!

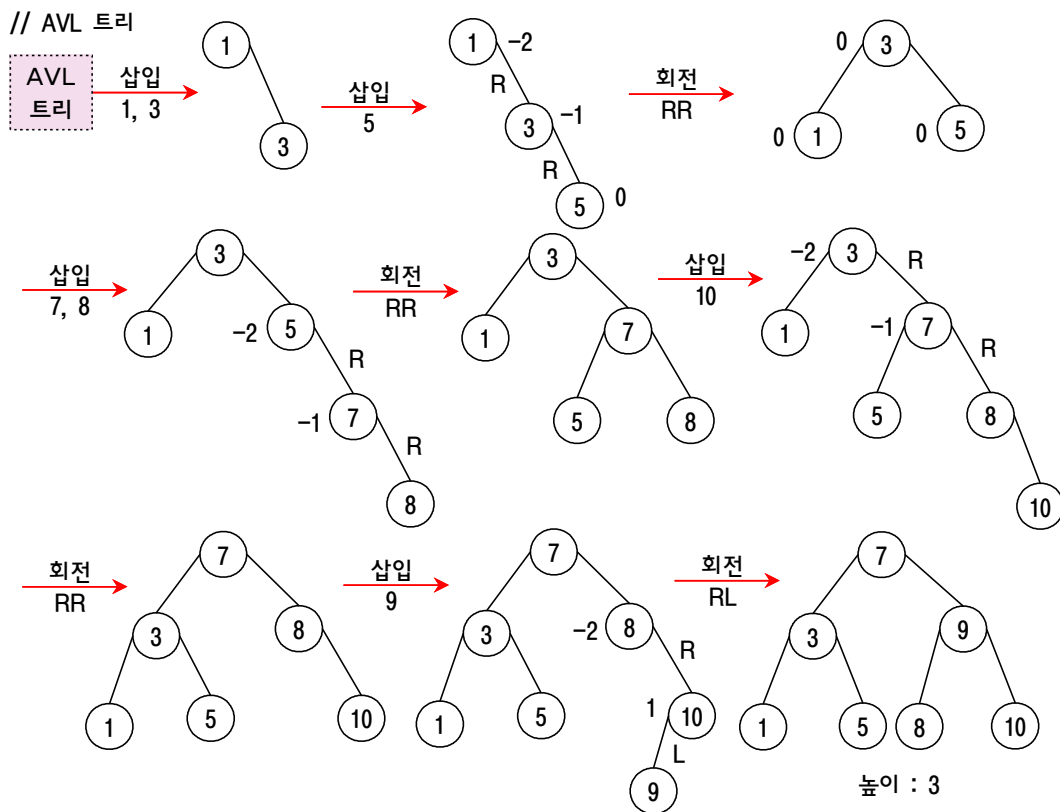
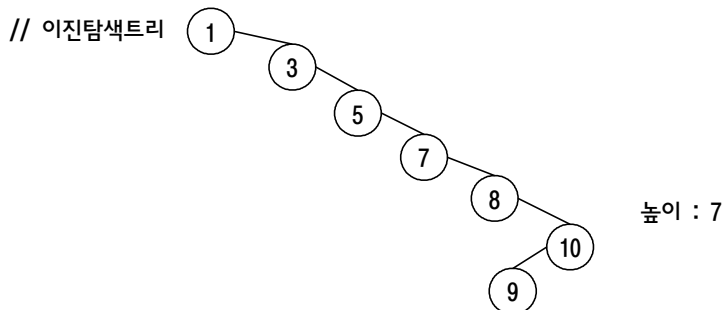


- 완성된 AVL 트리에서 균형인수(balance factor)가 1인 노드는 2와 7이다.

3. 데이터 <1, 3, 5, 7, 8, 10, 9>를 차례대로 하나씩 입력받아 이진탐색트리와 AVL 트리를 각각 만들었을 때, 두 트리 간의 높이 차는? [2021년 국가 7급]

- ① 1                      ② 2                      ③ 3                      ④ 4

☞ 이진탐색트리와 AVL 트리



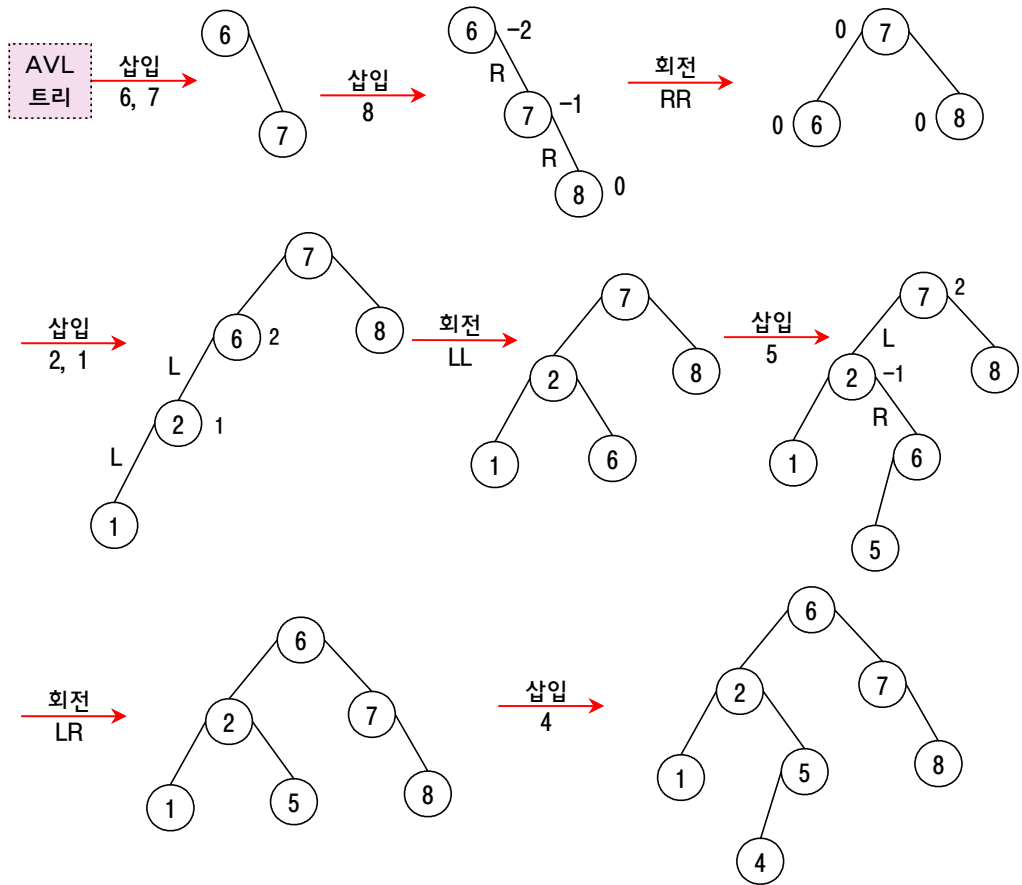
• 두 트리 간의 높이 차 = 7 - 3 = 4

4. 다음 데이터를 차례대로 하나씩 입력받아 AVL 트리를 생성할 때, 필요한 회전을 적용 순서대로 바르게 나열한 것은? [2022년 국가 7급]

6, 7, 8, 2, 1, 5, 4

- ① LL회전, LR회전, LR회전
- ② LL회전, LR회전, RL회전
- ③ RR회전, LL회전, LR회전
- ④ RR회전, LL회전, RL회전

♣ AVL 트리



• 회전 : RR회전, LL회전, LR회전

정답 : ③

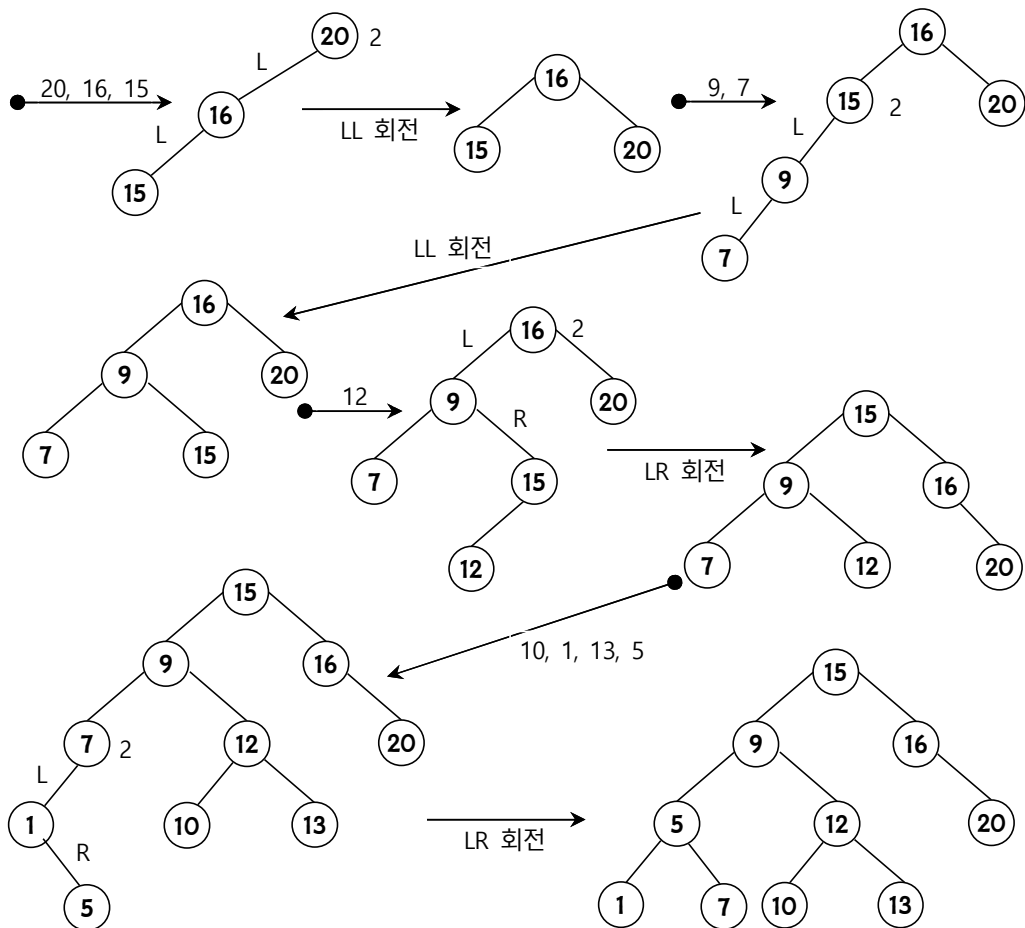


5. 다음 정수들을 순서대로 삽입하여 AVL 트리를 구성하였다. AVL 트리의 구성 과정 중에 사용된 회전방법들로 옳은 것은? [2013년 국가 7급] [2020년 군무 7급]

20, 16, 15, 9, 7, 12, 10, 1, 13, 5

- ① LL 회전, RR 회전, RL 회전
- ② RR 회전, RL 회전
- ③ LL 회전, LR 회전
- ④ LL 회전, LR 회전, RL 회전

☞ AVL 트리 - 20, 16, 15, 9, 7, 12, 10, 1, 13, 5



단순회전	LL 회전, RR 회전
이중회전	LR 회전, RL 회전

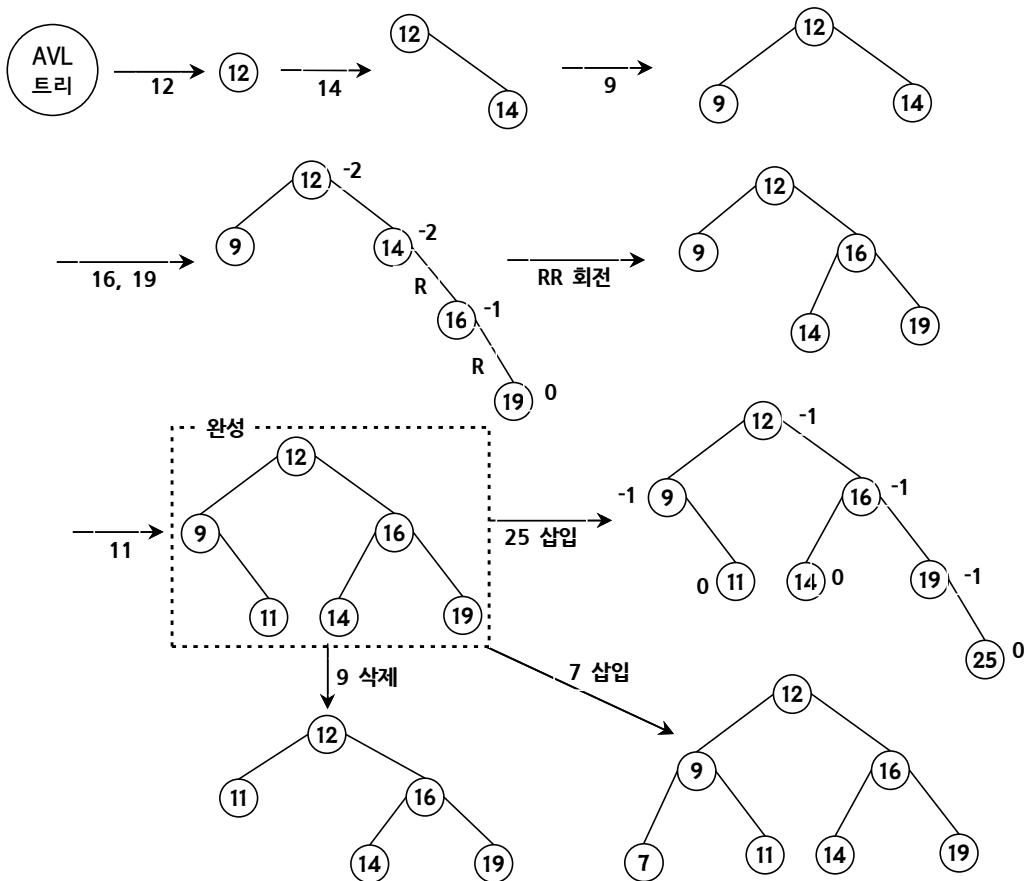
정답 : ③

6. 다음 키(key)를 갖는 데이터들을 공백 AVL 트리에 차례대로 저장하였다. 생성된 AVL 트리를 T 라고 할 때, 다음 설명 중에서 옳은 것은? [2017년 국가 7급]

12, 14, 9, 16, 19, 11

- ① T에 키가 25인 노드를 삽입하면 루트 노드가 바뀌게 된다.
- ② T에서 키가 9인 노드를 삭제하면 T의 높이가 1 감소한다.
- ③ T에 키가 7인 노드를 삽입하면 T의 높이가 1 증가한다.
- ④ 키가 9인 노드와 키가 16인 노드는 형제 노드이다.

☞ AVL 트리 - 입력 : 12, 14, 9, 16, 19, 11



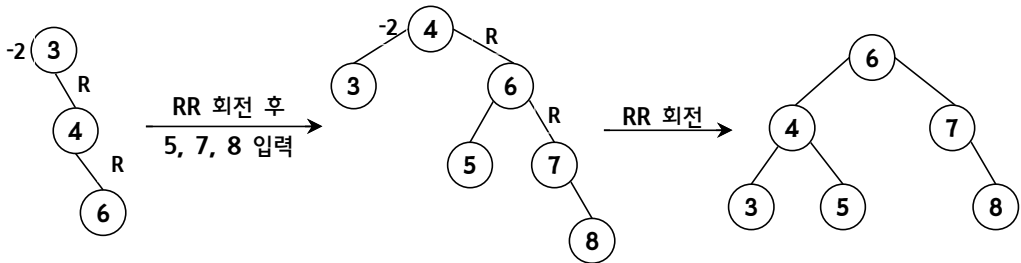
• 완성된 AVL 트리에서 키가 9인 노드와 키가 16인 노드는 형제 노드이다.(○)

7. 공백 AVL 트리에 데이터를 순서대로 삽입하여 AVL 트리를 구성할 때, 나머지와 다른 모습의 AVL 트리가 구성되는 데이터 키(key)들의 순서는? [2018년 국가 7급]

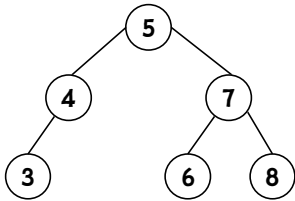
- ① 3, 4, 6, 5, 7, 8    ② 5, 4, 7, 3, 6, 8  
 ③ 7, 5, 8, 6, 4, 3    ④ 8, 7, 5, 4, 6, 3

☞ AVL 트리

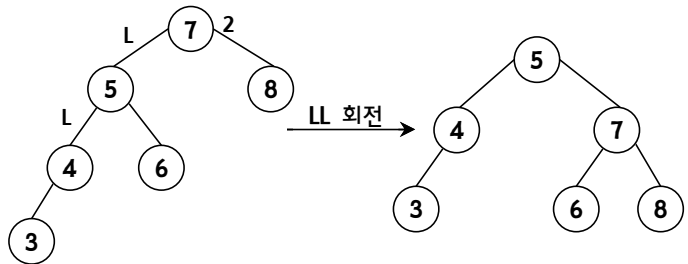
① 3, 4, 6, 5, 7, 8



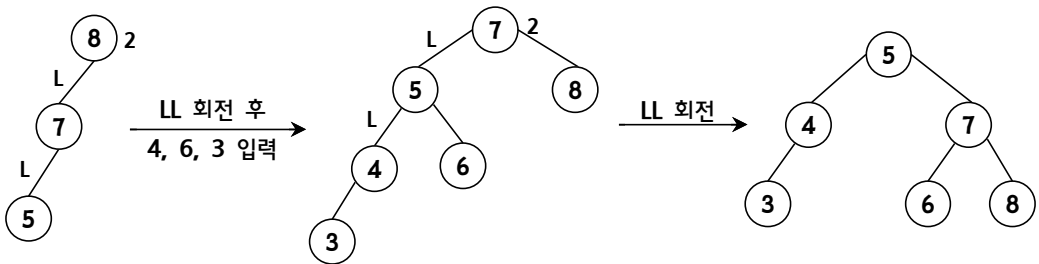
② 5, 4, 7, 3, 6, 8



③ 7, 5, 8, 6, 4, 3



④ 8, 7, 5, 4, 6, 3



• 나머지와 다른 모습의 AVL 트리는 ①번이다.

8. 다음과 같은 키 값을 갖는 데이터들을 순서대로 삽입하여 AVL 트리를 구성했을 때, 이 트리에서 각 키를 탐색하기 위한 평균비교횟수는? [2010년 국가 7급]

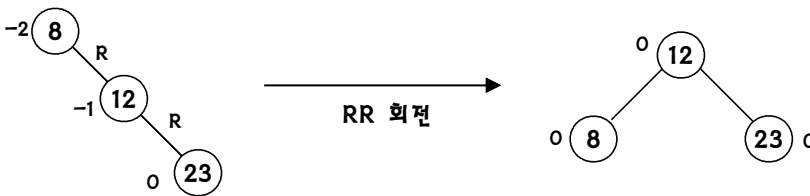
8, 12, 23, 9, 7, 6

- ① 14 / 6                      ② 15 / 6
- ③ 16 / 6                      ④ 17 / 6

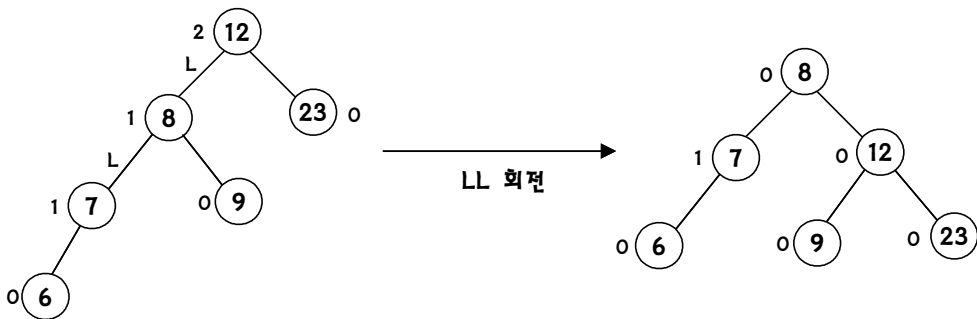
☞ AVL 트리 - 트리를 구성하면서 조건을 벗어나면 회전 실시(bf = -1, 0, 1)

- AVL 트리는 어떤 임의의 노드에 대해서도
- 왼쪽과 오른쪽 서브트리의 높이 차이(균형인수; BF)가 -1, 0, 1을 만족하는 트리이다.

① 먼저, 8, 12, 23 입력 - 23이 입력되면, AVL 트리 조건에 벗어남, RR 회전 실시



② 이어서, 9, 7, 6 입력 - 6이 입력되면, AVL 트리 조건에 벗어남, LL 회전 실시



∴ 탐색을 위한 키 평균비교횟수 =  $(1 + 2 \times 2 + 3 \times 3) / 6 = 14 / 6$

9. 다음의 키 값을 가지는 7개의 데이터를 순서대로 삽입하여 AVL 트리를 구성한 후 후위순회를 수행하였다. 방문 노드들의 키 값을 방문 순서대로 바르게 나열한 것은? [2020년 국가 7급]

10, 4, 7, 12, 3, 13, 15

① 3, 4, 10, 15, 13, 12, 7

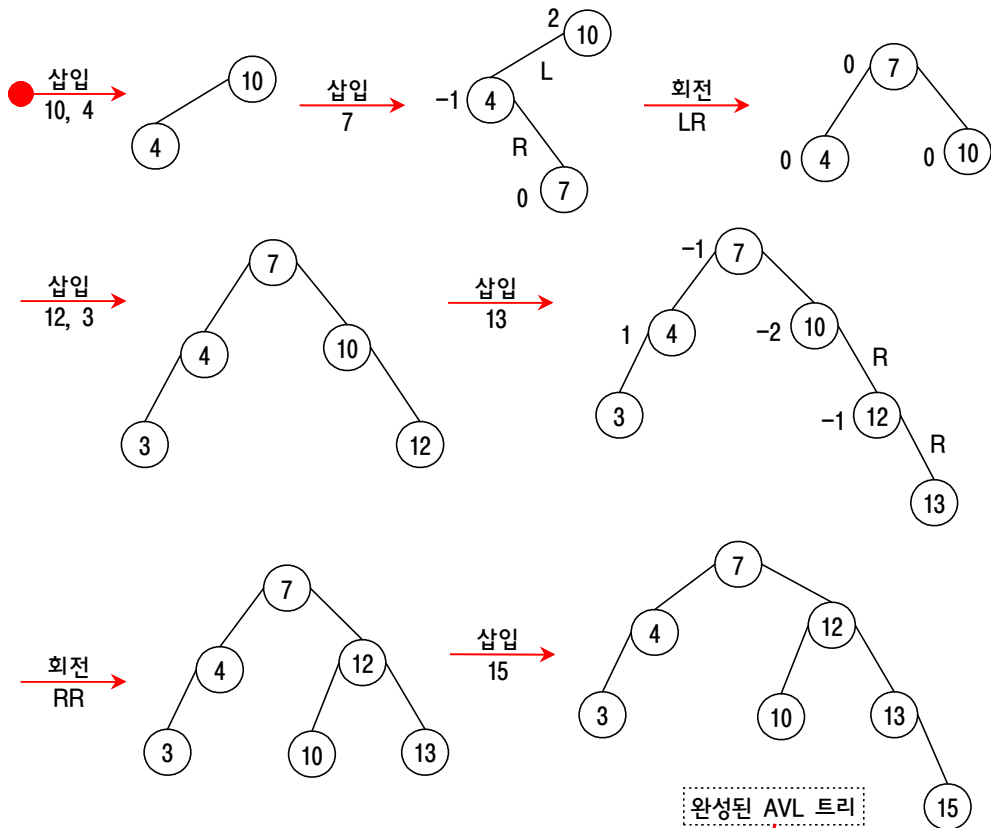
② 3, 7, 4, 12, 15, 13, 10

③ 3, 7, 4, 15, 13, 12, 10

④ 3, 10, 13, 15, 4, 12, 7

☞ AVL 트리

-1



후위순회(좌, 우, 중) : 3, 4, 10, 15, 13, 12, 7

- 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 여러 개 있을 때 주의할 것!
- 최근에 삽입된 노드에서 가장 가까운 조상노드의 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 회전 기준이다.

정답 : ①

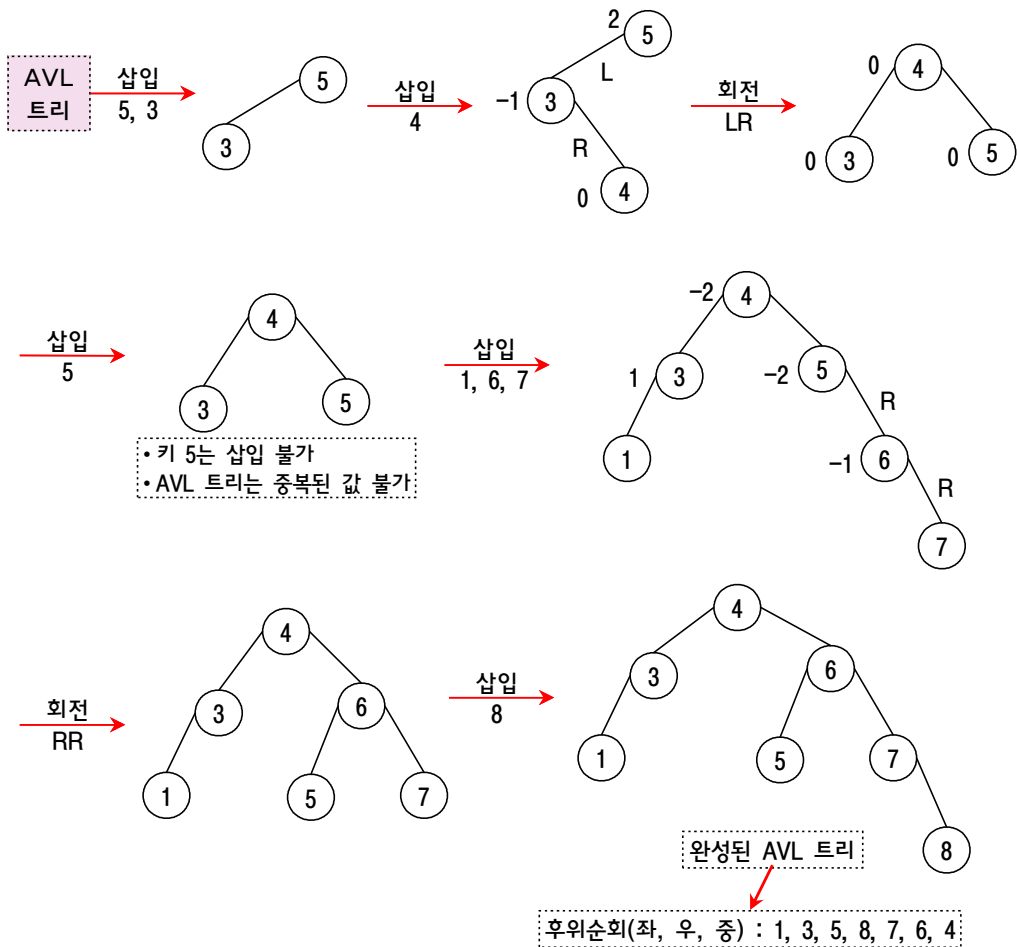
10. 다음과 같은 입력 데이터를 차례로 삽입하면서 AVL 트리를 구성하였다. 완성된 AVL 트리를 후위순회한 결과를 바르게 나열한 것은? [2020년 군무 7급]

입력 데이터 : 5, 3, 4, 5, 1, 6, 7, 8

- ① 1, 3, 5, 8, 7, 6, 4
- ② 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8
- ③ 4, 3, 1, 6, 5, 7, 8
- ④ 4, 3, 1, 5, 6, 7, 8

☞ AVL 트리

// AVL 트리에 동일한 값이 입력될 때, 어떻게 처리해야 하느냐? 이다.



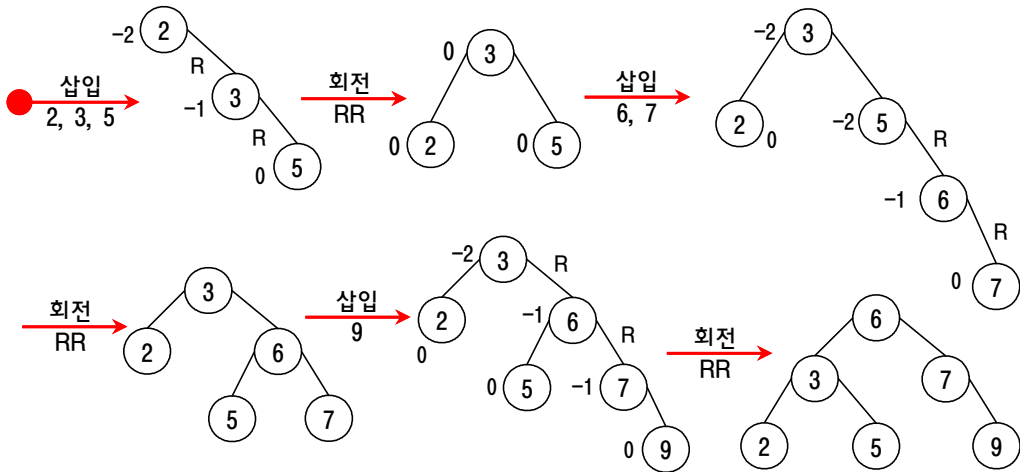
11. 공백 AVL 트리에 키(key)를 차례대로 저장하여 AVL 트리를 구축한다고 할 때, 생성되는 AVL 트리의 모양이 다른 것은? [2020년 서울 7급]

- ① 2, 3, 5, 6, 7, 9
- ② 3, 5, 6, 2, 7, 9
- ③ 5, 2, 3, 7, 6, 9
- ④ 6, 7, 9, 2, 3, 5

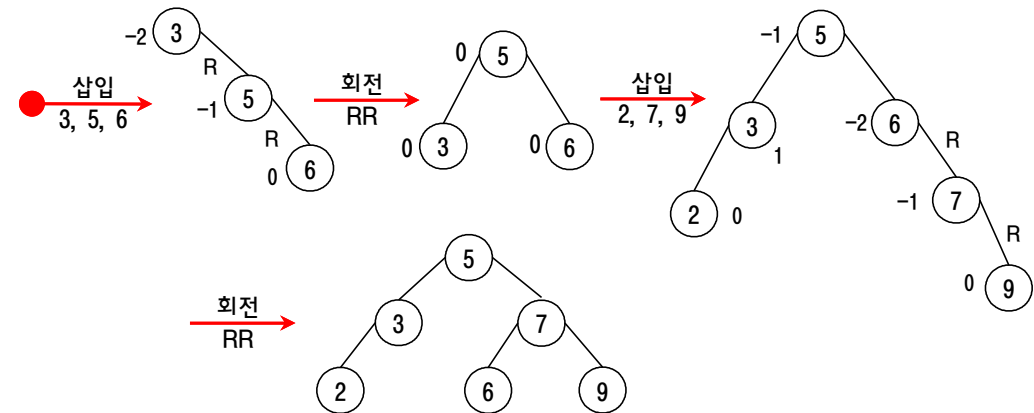
☞ AVL 트리

// 이런 유형의 문제는 모두 AVL 트리를 그려 보아야 한다.

① 2, 3, 5, 6, 7, 9

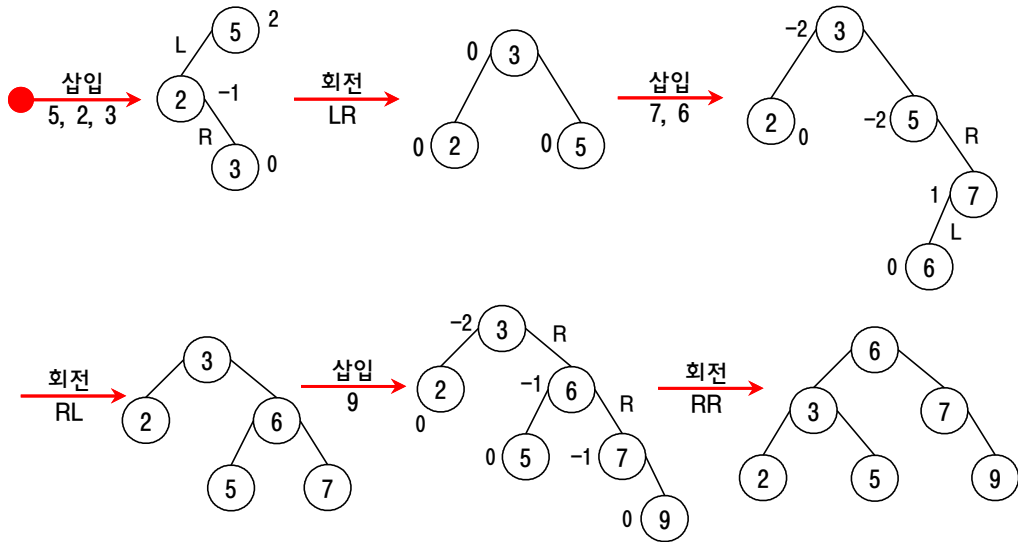


② 3, 5, 6, 2, 7, 9

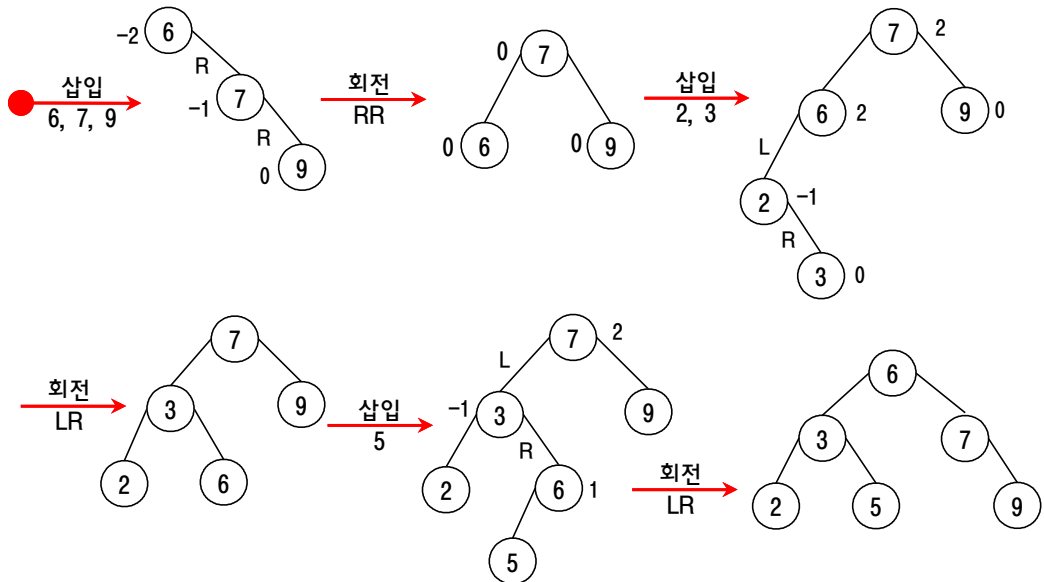


• 항목 ①과 ②는 AVL 트리 외부 모양이 다르다. 노드에 저장된 값은 같다.

③ 5, 2, 3, 7, 6, 9



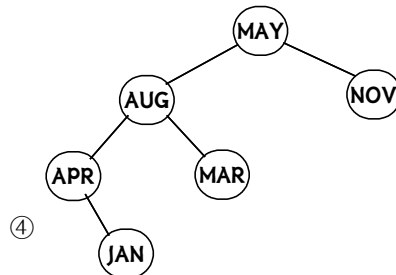
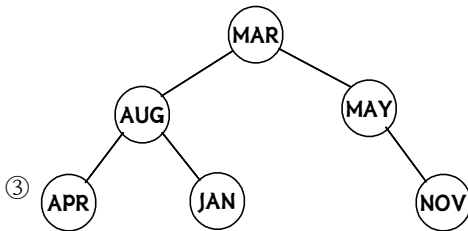
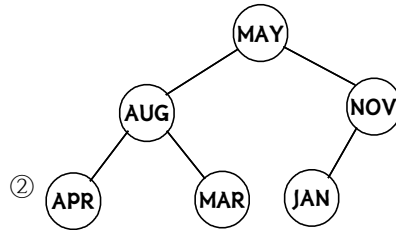
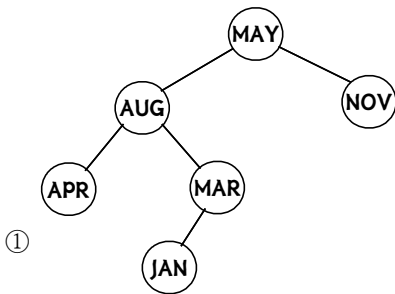
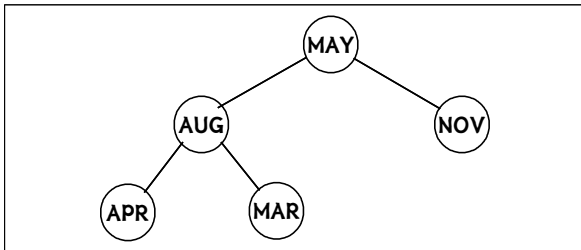
④ 6, 7, 9, 2, 3, 5



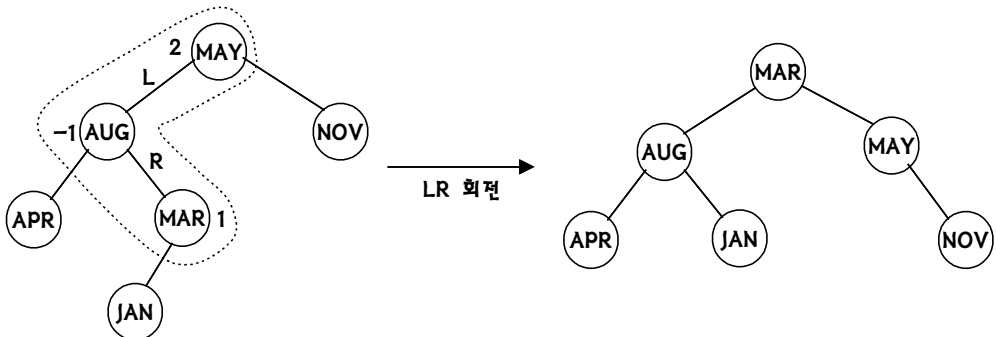
- 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 여러 개 있을 때 주의할 것!
- 최근에 삽입된 노드에서 가장 가까운 조상노드의 균형인수 값이  $\pm 2$ 인 노드가 회전 기준이다.



12. 다음은 알파벳 문자열을 키값으로 저장하는 AVL 트리이다. 이 트리에서 데이터 'JAN'을 삽입한 결과로 옳은 것은? [2009년 국가 7급]

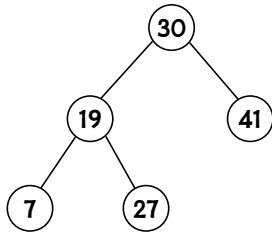


☞ AVL 트리 - LR 회전



정답 : ③

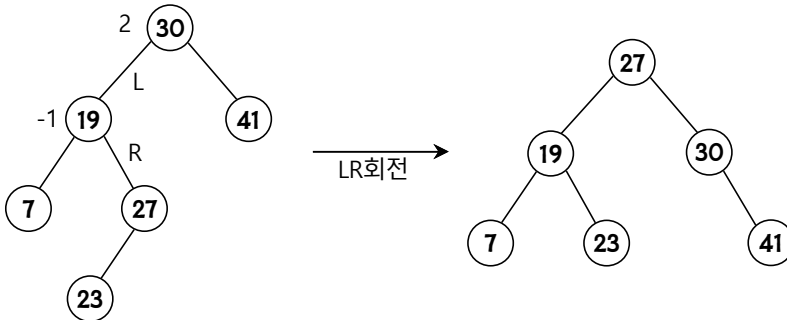
13. 다음 AVL 트리에 정수 23을 삽입하면 AVL 트리로서의 균형이 깨진다. 회전을 통해 이 트리를 AVL 트리로 변환한 후에 전위순회(preorder traversal)를 수행하였을 때 노드 방문 순서는? [2016년 국가 7급]



- ① 30, 19, 7, 23, 41, 27
- ② 30, 7, 19, 23, 27, 41
- ③ 27, 19, 7, 23, 30, 41
- ④ 27, 19, 7, 30, 23, 41

☞ AVL 트리에 정수 23을 삽입

• 정수 23을 삽입하고, LR회전 실시



• 전위순회(중간, 좌, 우) : 27, 19, 7, 23, 30, 41

정답 : ③

14. 다음 중 배열을 이용하기에 가장 적합하지 않은 응용 구조는? [2004년 기술고시]

- ① 최대힙(max-heap)의 구현
- ② 행렬(matrix)의 곱셈
- ③ 스택(stack)의 구현
- ④ AVL 트리의 구현

☞ AVL 트리 구현

• AVL 트리 구현은 연결리스트 구조를 사용하는 것이 바람직하다.

정답 : ④

15. 다음은 AVL 트리를 이용하여 우선순위 큐(priority queue)를 구현할 때, 최소값 찾기(findMin), 최소값 제거(deleteMin) 및 삽입(insert) 연산에 대한 최악의 경우 시간복잡도를 차례대로 나열한 것이다. 가장 적절한 것은? (단, 작은 값이 높은 우선순위를 갖는다고 가정한다) [2021년 군무원 7급]

- ①  $O(\log n) - O(\log n) - O(\log n)$
- ②  $O(1) - O(\log n) - O(\log n)$
- ③  $O(1) - O(\log n) - O(1)$
- ④  $O(\log n) - O(\log n) - O(1)$

☞ AVL 트리를 이용한 우선순위 큐

---

- 최소값 찾기, 제거, 삽입에 대한 최악의 경우 시간복잡도 : 모두  $O(\log n)$ 이다.
  - 이유는 AVL 트리의 탐색, 제거, 삽입에 대한 최악의 경우 시간복잡도가  $O(\log n)$ 이므로
- 

정답 : ①

16. 자료구조 중 최악의 경우를 기준으로 했을 때 탐색(search) 성능이 가장 좋은 것은? [2011년 국가 9급]

- ① 정렬되지 않은 배열
- ② 체인법을 이용하는 해시테이블
- ③ 이진탐색트리
- ④ AVL 트리

☞ 탐색 성능 - 최악의 경우

---

- 정렬되지 않은 배열 :  $O(n)$  → 순차탐색
  - 체인법을 이용하는 해시테이블 :  $O(n)$  → 순차탐색
  - 이진탐색트리 :  $O(n)$  → 사향이진트리가 되는 경우(순차탐색)
  - AVL 트리 :  $O(\log n)$  → 가장 우수함(균형트리)
- 

정답 : ④